| | | |
|---|---|---|
| Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: I v/a IV |
| Adres: | Studierichting: | Tentamen: Functietheorie 1 |
| Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: 18.03.99 |
| | | Naam docent: Hr. Epema |

41

5 ~~vooraf~~.

1 (a)

$z^3 = i = e^{\frac{\pi}{2} i + k 2\pi i}$

3

$z = e^{\pi/6\, i + 2/3\, k\pi i} \qquad k = 0, 1, 2$

Dus: $z_1 = e^{\pi/6\, i} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}$

$z_2 = e^{5/6\, \pi i} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}$

$z_3 = e^{9/6\, \pi i} = -i$

(b) V

Definitie hoofdtak $3^e$ machtswortel uit $z$ : V def. gebied

$z$ is te schrijven als $re^{i\varphi}$ met $\cancel{0 < \varphi < 2\pi}$ (*) $-\pi < \varphi < \pi$

1

dan is $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{re^{i\varphi}} = \sqrt[3]{r}\, e^{i \varphi/3}$ is de hoofdtak.

Gegeven $Re(z) > 0$

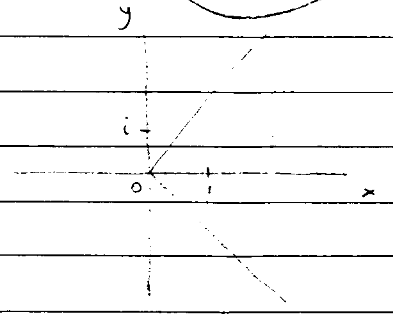
Dan is $z = re^{i\varphi}$ met $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < 2\varphi < \pi$

inconsistent, zie (*)

Nu:

$\sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{r^2}\, e^{i \frac{2}{3} \varphi}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

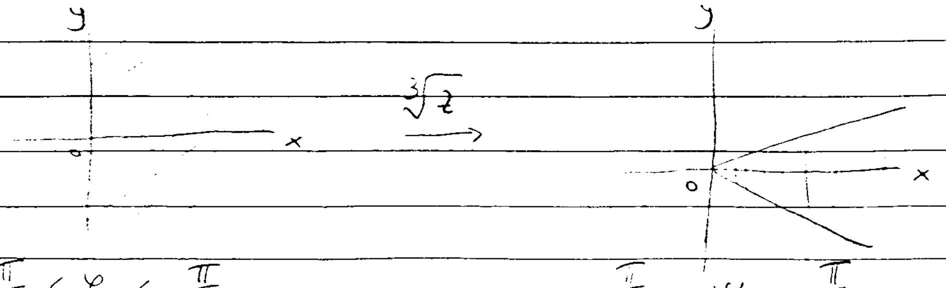



$-\frac{\pi}{3} < \varphi' < \frac{\pi}{3}$

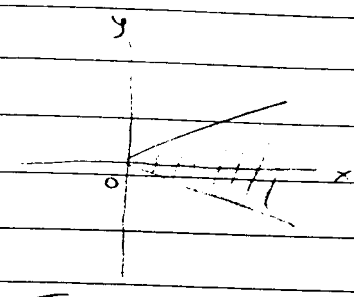
En:

$z \xrightarrow{①} \sqrt[3]{z} \xrightarrow{②} (\sqrt[3]{z})^2$

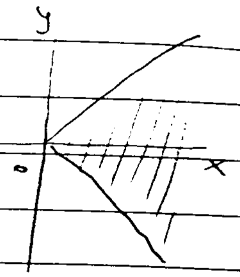
①




$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \qquad\qquad -\frac{\pi}{6} < \varphi' < \frac{\pi}{6}$




$\xrightarrow{(\sqrt[3]{z})^2}$




$-\frac{\pi}{6} < \varphi' < \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{3} < \varphi'' < \frac{\pi}{3}$

We krijgen hetzelfde beeld, dus
$Re(z) > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{z^2} = (\sqrt[3]{z})^2$.

(c) 0 $\quad$ elke $z \in \mathbb{C}$?

~~Bovendien~~ ~~$z$ is te schrijven als $re^{i\varphi}$, en nu geldt $\sqrt[3]{z^3} = z$ voor die $z = re^{i\varphi}$, wanneer $0 < \varphi < 2\pi$.~~
Immers $z$ is niet eenduidig gedefinieerd? want $z = re^{i\varphi} = re^{i\varphi + k2\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$, dus willen we de hoofdtak dan is. $k = 0$ en $0 < \varphi < 2\pi$.

2 $\quad$ 5

Gegeven: $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$
$f(0) = 0$

$f$ is analytisch d.e.s.d.a. $f$ totaal differentieerbaar is en voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen (dat zijn: $u_x = v_y$ & $u_y = -v_x$).

$u_x = 2x + 1 = v_y$
$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + y + h(x)$
Dit differentiëren naar $x$ geeft
$v_x = 2y + \frac{dh}{dx} = -u_y = -(-2y) = 2y$
$\Rightarrow \frac{dh}{dx} = 0 \Rightarrow h(x)$ is constant ~~(of 0)~~
aangezien $f(0) = 0$ is $h(x) = 0$

Conclusie:
$v(x,y) = 2xy + y$

| | | |
|---|---|---|
| Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: II v/d IV |
| Adres: | Studierichting: | Tentamen: Functietheorie 1 |
| Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: |
| | | Naam docent: |

2 (b) 4

Voor reële $z$, dus $z \in \mathbb{R}$ geldt:
$f(z) = x^2 + x = z^2 + z$, immers
$z = x + iy$ en voor reële $z$ geldt $y = 0$
$\Rightarrow z = x$

Nu m.b.v. Identiteitsstelling, kun je zeggen
$f(z) = z^2 + z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Identiteitsstelling:
Zij $f(z)$ en $g(z)$ analytisch op $G$ ($G$ een gebied)
Stel $S = \{ z \mid f(z) = g(z) \}$
Als nu $S$ een verdichtingspunt in $G$ bevat,
dan is $f(z) = g(z) \quad \forall z \in G$.

Deze stelling mag je gebruiken, want $f(z)$ is analytisch op $G = \mathbb{C}$ (gegeven) en $g(z) = z^2 + z$ is ook analytisch op $G = \mathbb{C}$. Hier is dan $S = \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ ~~bevat~~ heeft verdichtingspunten in $\mathbb{C}$, dus $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

3 (a) 3

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ heeft de volgende convergentiestraal:

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1} \right|$$

(* deel teller en noemer door $n \cdot 2^n$ *)

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{2 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} \right| = 2$$

We kunnen dan meteen zeggen dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$
~~als~~ convergentiestraal $\rho' = \sqrt{2}$ heeft

(b)

6

$\boxed{0 < |z| < 2}$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)^2}$$

Gebruik makend van de hint : $\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2-z}\right\}$
gaan we eerst de laurentreeks van $\frac{1}{2-z}$
bepalen.

$$\frac{1}{2-z} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Opm: $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ en we weten:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , 0<|x|<1$$

Nu:

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2-z}\right\} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}$$

o.k.

Dan:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{z^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{2}\right)^{n-3}$$

$$= \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{3}{16} + \frac{z}{8} + \dots$$

$\boxed{|z| > 2}$

Weer gaan we de laurentreeks van $\frac{1}{2-z}$
bepalen :

$$\frac{1}{2-z} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{2}{z}-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

NB : $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2-z}\right\} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{2}{z}\right)^n\cdot\left(-\frac{2}{z^2}\right)$$

$$\cancel{= \frac{1}{4}\sum^{\infty}(n+1)\left(\frac{2}{z}\right)^{n+2}}$$

| | | |
|---|---|---|
| Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: III v/a IV |
| Adres: | Studierichting: | Tentamen: Functietheorie 1 |
| Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: |
| | | Naam docent: |

3 (b) vervolg

Dan:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{2}{z}\right)^n \frac{1}{z^2} \frac{1}{z^2}$$

$$= \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{2}{z}\right)^{n+4}$$

$$= \frac{1}{z^4} + \frac{4}{z^5} + \frac{12}{z^6} + \dots$$

4 (a)

Residuenstelling

$1\frac{1}{2}$ ~~Laat f een complexe analytische functie zijn en γ een stuksgewijs differentieerbare gesloten kromme~~

Laat f een analytische functie zijn op G, behalve op (enkele) geïsoleerde punten p ${}^{\text{na}}$ en verder is γ een stuksgewijs differentieerbare

V ~~a~~ gesloten kromme in G dan is $\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\,dz$

V γ niet door sing. pt

de som van de residuen van de punten p, ~~met~~ $\sum_{p}$ (Res$_p$ f(z)), waarbij aan geteld wordt hoe vaak dit punt omlopen wordt (dwz. vermenigvuldigd met zijn omloopsgetal, genoemd $\nu_\gamma(p)$.)

V γ omloopt alleen pts van G.

(b) 3

Polen zijn: $z(z-2) = 0$

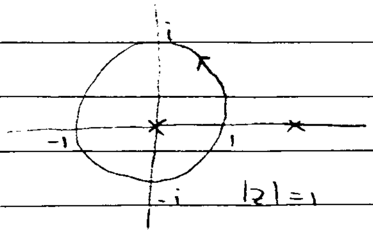
$z_1 = 0, \quad z_2 = 2$ (beide enkelv. nulpnt.)

Nu alleen $z_1 = 0$ ligt binnen de contour, daarvan moeten we het residu van berekenen

V. $\text{Res}_0 \frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2}$ (want ....

Dus:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z-2)} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$



(c) 3

Polen zijn: $z(z-2)^2 = 0$

$z_1 = 0$ (enkelv. ~~nulpnt.~~ pool)

$z_2 = 2$ (dubbel ~~nulpnt.~~ pool)

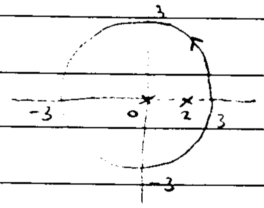
Nu liggen alle polen binnen de contour ($|z|=3$), dus moeten alle residuen hiervan worden uitgerekend.

$$\text{Res}_0 \frac{1}{z(z-2)^2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Res}_2 \frac{1}{z(z-2)^2} = \frac{d}{dz}(z-2)^2 \frac{1}{z(z-2)^2}\Big|_{z=2}$$

$$= -\frac{1}{z^2}\Big|_{z=2} = -\frac{1}{4}$$

Dan:




$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z(z-2)^2} = 2\pi i \sum_p \text{Res}_p\, f(z)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

5 (d)

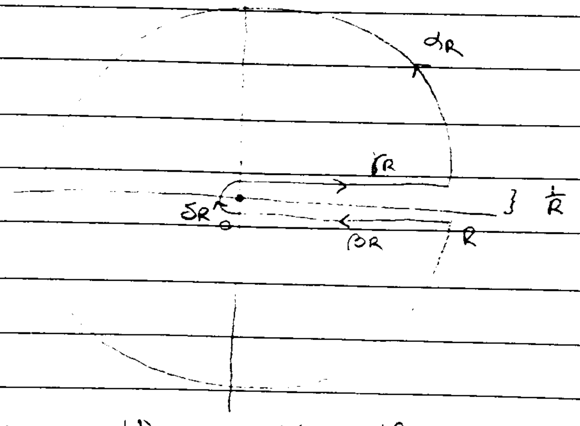
$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}$, waarin we de substitutie $z = xe^{i\varphi}$ toepassen, en dus $dz = e^{i\varphi}dx$, $0<\varphi<2\pi$

Dan:

$\sqrt{z} = \sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$, $0<\varphi<2\pi$, $r>0$

z ∈ posit. gecoup. vlak.

De contour $C_R$ wordt:




$\gamma_R$: Hier gaat $\varphi \to 0$ als $R \to \infty$ dus

$\sqrt{z} = \sqrt{x}\, e^{i\varphi/2} = \sqrt{x}$, dus $\int_{\gamma_R} \dots \to \int_0^\infty \dots$ (volgt

$\beta_R$: Hier gaat $\varphi \to 2\pi$ als $R \to \infty$, dus

$\sqrt{z} = \sqrt{x}\, e^{i\varphi/2} = -\sqrt{x}$

| | | |
|---|---|---|
| Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: IV v/d IV |
| Adres: | Studierichting: | Tentamen: Functietheorie 1 |
| Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: |
| | | Naam docent: |

5 (b)

3

Voor $R \to \infty$ :

$$\int_{\gamma_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}\,dz \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{\beta_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}\,dz \longrightarrow -e^{2\pi i}\int_0^\infty \frac{-\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$$

$\alpha_R$ : lengte van $\alpha_R = 2\pi R$

$|f(z)| \le \frac{2\cdot A}{R^{1\frac{1}{2}}}$ ( $A>2$ ; $R$ vold. groot )

niet exact.

$$\Rightarrow \left|\int_{\alpha_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{2\cdot 2\pi R}{R\sqrt{R}}$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha_R} \to 0 \quad \text{als } R \to \infty$$

$\delta_R$ : lengte van $\delta_R = \pi\frac{1}{R}$

$|f(z)| \le 2\sqrt{\frac{1}{R}}$, als $R \ge R_0$.

$$\Rightarrow \left|\int_{\delta_R} f(z)\,dz\right| \le 2\pi\left(\frac{1}{R}\right)^{1\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{\delta_R} \to 0 \quad \text{als } R \to \infty$$

(c)

2

Polen: $z^2+1=0$

$z^2=-1$

$z=-i$, $z=i$ (enkelv nulpnt.)

$$\operatorname{Res}_i \frac{\sqrt{z}}{(z+i)(z-i)} = \frac{\sqrt{i}}{2i} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)}{2i} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(1-i)$$

X

$$\operatorname{Res}_{-i} \frac{\sqrt{z}}{(z-i)(z+i)} = \frac{\sqrt{-i}}{-2i} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+i)}{-2i} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(1+i)$$

hoe zo?

$\sqrt{z}$ fout uitgerekend voor $z=-i$

(d)

1/2

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = 2\pi i \cdot \sum \operatorname{Res} f(z)$$

~~2π~~

$$= 2\pi i \left( \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \right)$$

$$= \sqrt{2}\,\pi i$$

Conclusie:

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx}_{\text{reëel},\,>0} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi i$$

dat kan natuurlijk niet!